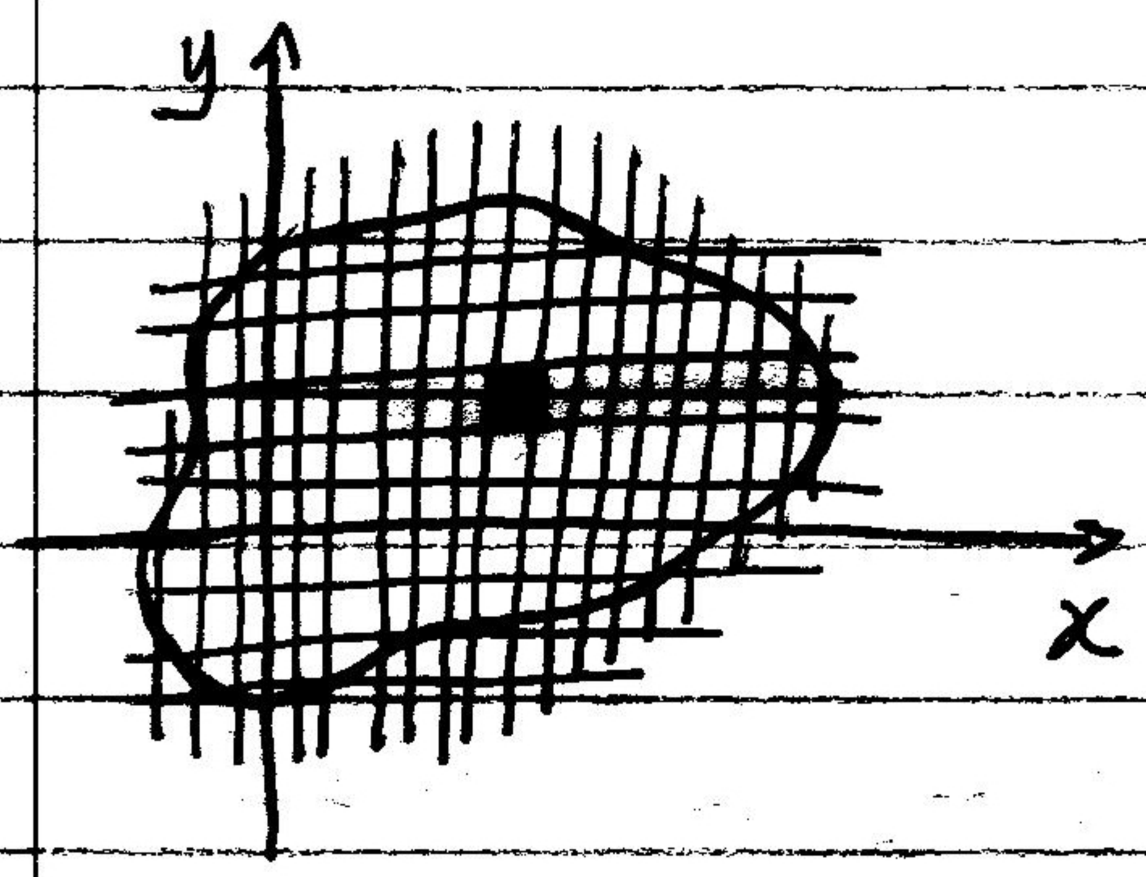
Κλασική Μηχανική 8.3.17.

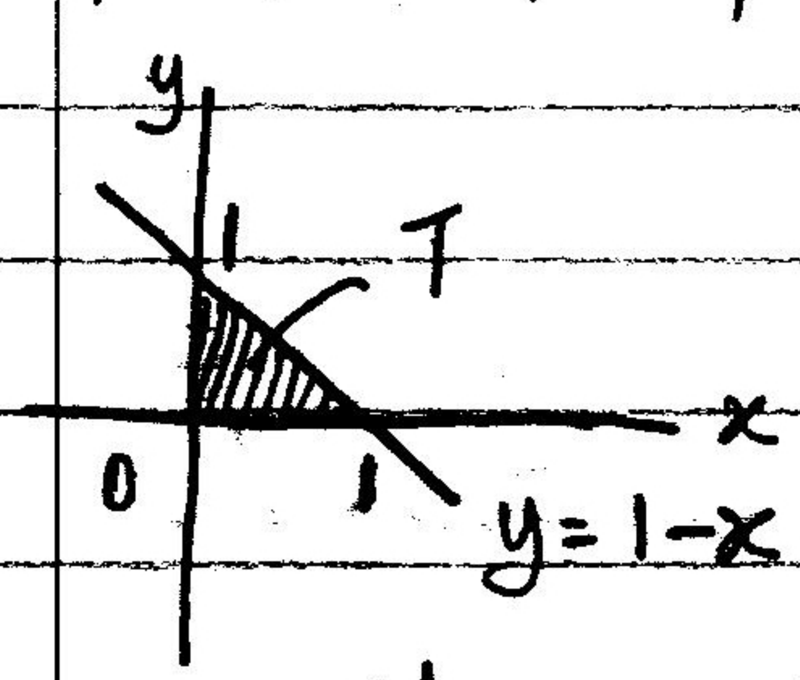
• Πυκνότητα και Μάζα.



Θεωρούμε λεπτό επίπεδο στρώμα υλικού εμβαδού A
Ο τρόπος που κατανέμεται η μάζα του στο χωρίο R ονομάζεται πυκνότητα
Δηλαδή στο στοιχειώδες κομμάτι ΔA η πυκνότητα είναι σταθερή και είναι $\rho = \dfrac{\Delta m}{\Delta A}$, δηλαδή καθώς $\Delta A \to 0$

$$\rho = \frac{dm}{dA} \quad ή \quad m = \iint_R \rho \, dA.$$

Παράδειγμα: Η μάζα ενός τριγώνου κατανέμεται σύμφωνα με το νόμο $\rho(x,y) = xy$. Να υπολογισθεί η μάζα του.



Είναι $m = \iint_T \rho \, dA = \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \, dy \, dx$

$$= \int_0^1 x \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}(1-x)^2 dx = \ldots \quad \mu.\ μάζας.$$

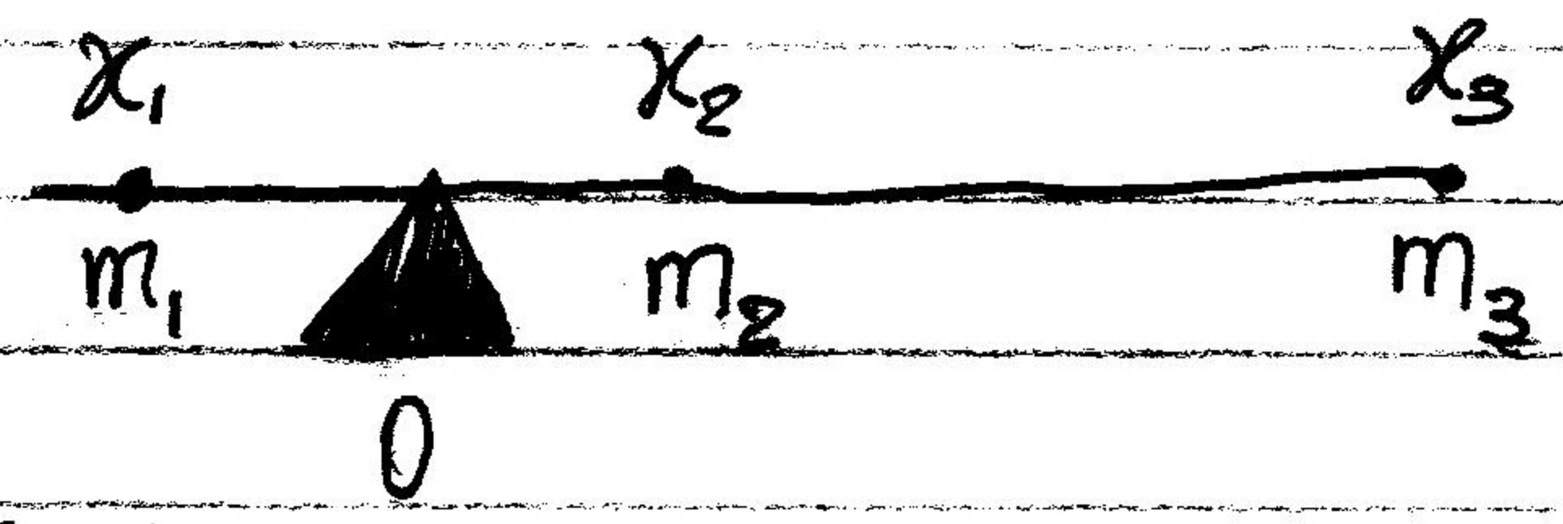
<u>ΔΕΝ</u> ισχύει ότι $\int_0^1 \int_0^{1-x} xy \, dy \, dx = \int_0^1 x \, dx \int_0^{1-x} y \, dy$

(Τα πολλαπλά ολοκληρώματα μπορούν να υπολογισθούν ως γινόμενο των επιμέρους ολοκληρωμάτων, όταν τα άκρα ολοκλήρωσης είναι σταθερά και η ολοκληρωτέα συνάρτηση μπορεί να γραφεί ως γινόμενο.)

Αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης $\int_0^1 \int_0^{1-y} xy \, dx \, dy \xrightarrow[x,y]{εναλλαγή} \int_0^1 \int_0^{1-x} xy \, dy \, dx$

ο Κέντρο Μάζας

Θεωρούμε m_1, m_2, m_3 μάζες που προσδένονται σ' έναν άκαμπτο άξονα, στηριζόμενο σε υπομόχλιο που τοποθετείται στο O.



(α) γνωρίζοντας τις μάζες m_1, m_2, m_3 και τα αντίστοιχα σημεία x_1, x_2, x_3, να βρεθεί η θέση O ώστε ο άξονας να ισορροπεί.

(β) γνωρίζοντας τις μάζες m_1, m_2, m_3 και το σημείο O του υπομοχλίου, να βρεθούν οι θέσεις x_1, x_2, x_3 ώστε ο άξονας να ισορροπεί.

Στο σύστημα με το υπομόχλιο η τυχαία μάζα m_i θέλει να στρέψει τον άξονα βάση της δύναμης της βαρύτητας $m_i g$. Η επίδραση αυτή καλείται ροπή βαρύτητας

Η ροπή αυτή $M_i = m_i g x_i$

Η συνολική ροπή βαρύτητας στο σύστημα είναι $\sum_{i=1}^{3} M_i = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 = g \sum_{i=1}^{3} m_i x_i$

Θεωρήσαμε ότι το O αντιστοιχεί στην αρχή των αξόνων

Έστω $\bar{x}$ το σημείο ισορροπίας που δεν είναι κατ' ανάγκη το O!

Τότε η συνολική ροπή βαρύτητας είναι $M = g \sum_{i=1}^{3} m_i (x_i - \bar{x})$

Εφόσον μιλάμε για σημείο ισορροπίας $M = 0$.

Δηλαδή στη γενική περίπτωση: $\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - \bar{x}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i x_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{x} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i x_i - \bar{x} \sum_{i=1}^{n} m_i = 0 \Leftrightarrow$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Τα σημεία x_i αντιστοιχούν σε συν/νες κι έχουν πρόσημο.

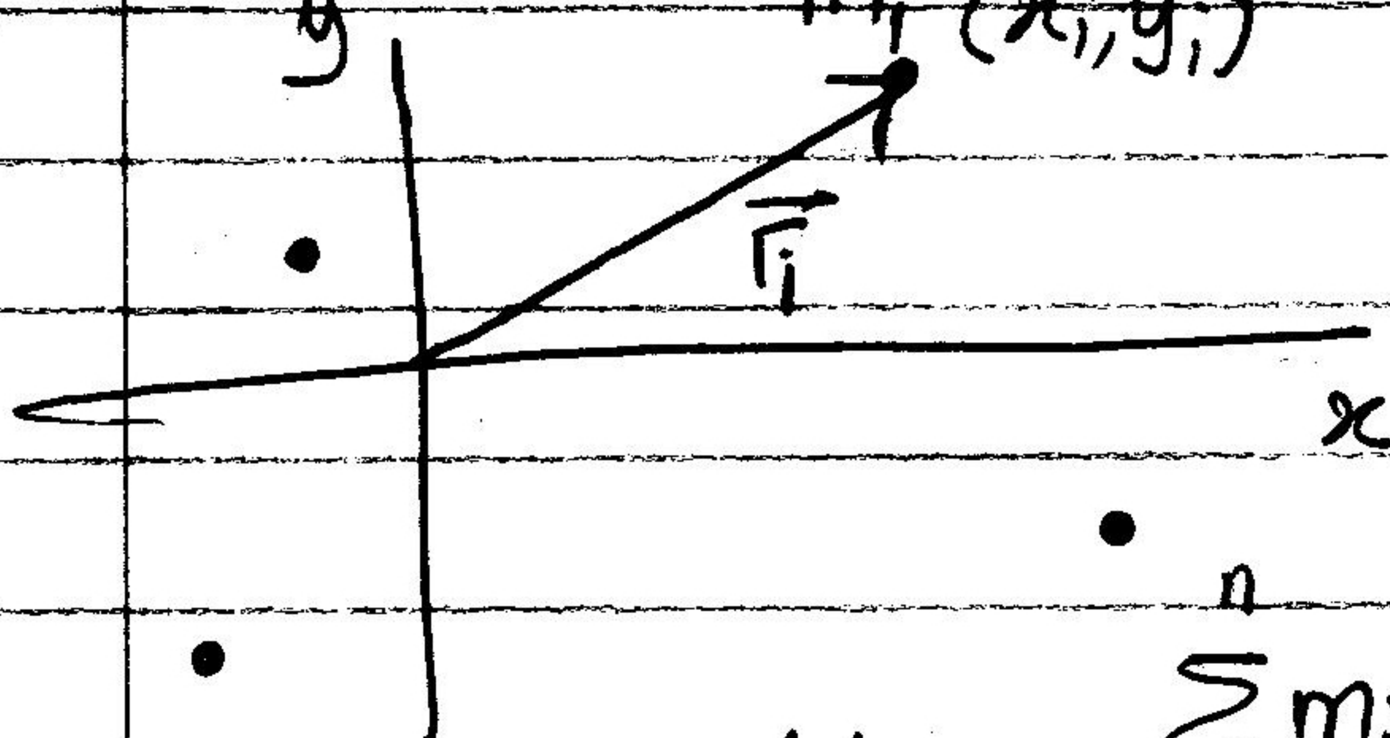
Παράδειγμα: Να βρεθεί το κ.μ. συστήματος δυο σωματιδίων με $m_1 = m_2 = m$ τοποθετημένα στις θέσεις $x_1 = x_0$, $x_2 = -x_0$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{2} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{2} m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{-m x_0 + m x_0}{2m} = 0$$

Προσέχω: Οι συν/νες με το πρόσημό τους, το κ.μ. μπορεί να είναι και αρνητικό, το αποτέλεσμά μου να έχει νόημα.

• Μάζες στο επίπεδο

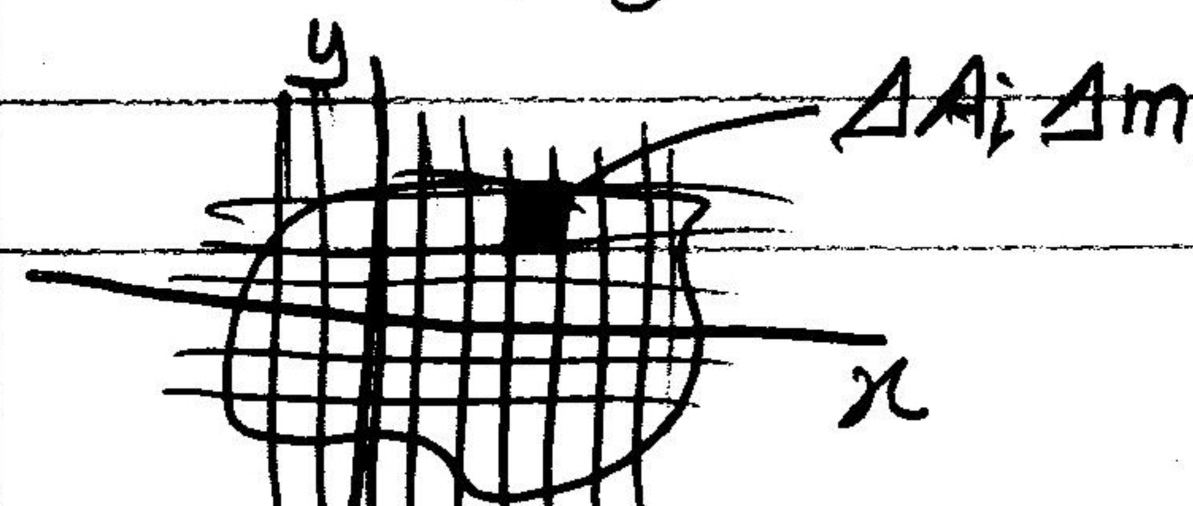
Έστω ένα σύστημα μαζών στο επίπεδο



Κάθε μάζα m_i χαρακτηρίζεται από ένα διάνυσμα θέσης $\vec{r}_i = x_i \hat{i} + y_i \hat{j}$, και η συνολική μάζα του συστήματος $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$

, με $\bar{x} = \frac{M_x}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m}$, $\bar{y} = \frac{M_y}{m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{m}$.

Γενίκευση: Λεπτά και επίπεδα στρώματα με συνεχή κατανομή μάζας.



$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta m_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i}$$

$\Delta m_i = \rho \Delta A$, άρα θα χρειαστώ το όριο $\Delta A \to 0$.

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_R y\rho\, dA}{\iint\limits_R \rho\, dA}, \quad \bar{y} = \frac{\iint\limits_R x\rho\, dA}{\iint\limits_R \rho\, dA}$$

Συνοπτικά, για ένα στερεό σώμα στο επίπεδο με συνεχή κατανομή πυκνότητας, ορίζω:

Εμβαδό: $A = \iint\limits_R dA = \iint\limits_R dx dy = \iint\limits_R dy dx$

Μάζα: $m = \iint\limits_R \rho\, dA = \iint\limits_R \rho\, dx dy = \iint\limits_R \rho\, dy dx$

Κέντρο μάζας: $(\bar{x}, \bar{y})$: $\bar{x} = \dfrac{\iint\limits_R y\rho\, dA}{m}$, $\bar{y} = \dfrac{\iint\limits_R x\rho\, dA}{m}$

Αν $\rho = \rho_0$ σταθερή: $\bar{x} = \dfrac{\iint\limits_R y\, dA}{A}$, $\bar{y} = \dfrac{\iint\limits_R x\, dA}{A}$.